Estimare pentru control – Laborator 9
Decuplarea intrărilor necunoscute

Logistică

- Această temă trebuie realizată de un grup de maxim 2 studenți.
- Soluția temei reprezintă codul Matlab și modelul Simulink. Acest cod va fi verificat și rulat de către profesor în timpul laboratoarelor, iar prezența la laborator va fi acordată doar dacă este prezentată o soluție originală care merge. Sunt necesare toate prezențele la laboratoare pentru a intra în examen. De asemenea, maxim 2 laboratoare pot fi recuperate la finalul semestrului, ceea ce înseamnă că 3 sau mai multe absențe pe parcursul semestrului duc la inabilitatea de a intra în examenul final.
- Schimbul de idei între studenți este încurajat. Totuși, distribuirea și împrumutarea unor bucăți de cod este interzisă, iar orice încălcare a acestei reguli va duce la descalificarea soluției.

Decuplarea intrărilor

În acest laborator se va studia ce se întâmplă când dinamica sistemului este perturbată de un semnal de intrare necunoscut. Diferența față de laboratorul trecut este că nu mai există restricția ca perturbația să fie constantă. Observatorul care decuplează intrarea necunoscută poate fi folosit pentru a estima stările oricare ar fi perturbația.

Se consideră următorul model pentru sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u + E\,d \\ y &= C\,x, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ este vectorul de perturbații iar E este matricea de perturbații. Observatorul are următoarea formă:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F\,z + TB\,u + K\,y \\ \hat{x} &= z + H\,y, \end{aligned} \tag{2}$$

unde z este o stare auxiliară, $\hat{x}$ este estimarea lui x iar F, T, K și H vor fi definite mai târziu. Obiectivul este de a estima stările sistemului, ceea ce înseamnă că $e = x - \hat{x} \to 0$, when $t \to \infty$. Dinamica erorii poate fi scrisă în următoarea formă:

$$\begin{aligned} \dot{e} =& \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \ Ax + Bu + Ed - \big[\dot{z} + H\dot{y}\big] = \\ & Ax + Bu + Ed - \big[Fz + TBu + Ky + HC\dot{x}\big] = \\ & Ax + Bu + Ed - \big[Fz + TBu + Ky + HC(Ax + Bu + Ed)\big] \end{aligned} \tag{3}$$

Se separă termenul $K = K_1 + K_2$, astfel se obține $Ky = K_1 Cx + K_2\,y$, iar în continuare rezultă:

$$\dot{e} = (A - K_1C - HCA)x + (B - TB - HCB)u + (E - HCE)d - Fz - K_2\,y. \tag{4}$$

Pentru a introduce e în ecuație se scade și se adună $\hat{x}$ înmulțit cu matricile lui x:

$$
\begin{aligned}
\dot{e} =& (A - K_1C - HCA)x - (A - K_1C - HCA)\hat{x} + (A - K_1C - HCA)\hat{x} \\
& + (B - TB - HCB)u + (E - HCE)d - Fz - K_2\, y = \\
& (A - K_1C - HCA)e + (A - K_1C - HCA)\underbrace{(z + Hy)}_{\hat{x}} \\
& + (B - TB - HCB)u + (E - HCE)d - Fz - K_2\, y = \\
& (A - K_1C - HCA)e + (A - K_1C - HCA - F)z + \big((A - K_1C - HCA)H - K_2\big)\, y \\
& + (B - TB - HCB)u + (E - HCE)d.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

În acest moment se obține o formă complicată a dinamicii erorii cu termeni care depind de variabilele sistemului. Este de dorit ca dinamica erorii să fie de forma:

$$\dot{e} = (A - K_1C - HCA)e, \tag{6}$$

ceea ce înseamnă ca restul matricilor sunt 0. De reținut că notația 0 definește o matrice de zerouri de dimensiune corespunzătoare. Avem astfel

$$
\begin{aligned}
A - K_1C - HCA - F =& 0 \\
(A - K_1C - HCA)H - K_2 =& 0 \\
B - TB - HCB =& 0 \\
E - HCE =& 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

De aici se obține:

$$
\begin{aligned}
F =& TA - K_1C \\
K_2 =& FH \\
T =& I - HC \\
H =& E(CE)^*,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

unde $(CE)^*$ este pseudo-inversa lui CE, ceea ce înseamnă ca $CE(CE)^* = I$ (Matlab `pinv(CE)`). Principalul avantaj ale acestei abordări este că estimarea erorii e converge la 0 pentru $t \to \infty$ indiferent de prezența unei intrări necunoscute.

Condițiile necesare pentru proiectare sunt:

- pentru a calcula H este necesară condiția ca $\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(CE)$
- perechea (TA, C) trebuie să fie complet observabilă pentru a calcula K_1, astfel încât F este Hurwitz (toate valorile proprii sunt negative).

De notat că în cazul sistemelor liniare în timp discret avem aceeați condiții de de proiectare, iar estimatorul este de forma:

$$
\begin{aligned}
z(k+1) =& F\, z(k) + TB\, u(k) + K\, y(k) \\
\hat{x}(k) =& z(k) + H\, y(k),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Exemplu

Se consideră următorul model liniar:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}}_{\text{A}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{B}} \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix}}_{\text{E}} d \\
y &= \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{C}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Pe baza modelului se poate observa că perturbația are efect asupra lui x_1 și x_3. Condiția pentru rangul matricii este îndeplinită $\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(CE) = 1$, astfel, din (8) se obține:

$$
H = \begin{bmatrix}0.94 & 0.23\\ 0 & 0\\ 0.23 & 0.05\end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix}0.05 & 0 & -0.23\\ 0 & 1 & 0\\ -0.23 & 0 & 0.94\end{bmatrix}. \tag{11}
$$

Perechea (TA, C) este observabilă, astfel:

$$
K_1 = \begin{bmatrix}1.97 & 0.32\\ -2.04 & -0.02\\ -0.16 & -0.86\end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix}-1.82 & -0.45\\ 0.04 & 0.01\\ -0.08 & -0.02\end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix}-1.97 & 0.05 & 0.14\\ 0.04 & -3 & 0.02\\ 0.16 & -0.23 & -1.02\end{bmatrix}. \tag{12}
$$

În final, observatorul care decuplează intrarea necusnocută este de forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} =& \underbrace{\begin{bmatrix}-1.97 & 0.05 & 0.14\\ 0.04 & -3 & 0.02\\ 0.16 & -0.23 & -1.02\end{bmatrix}}_{F} z + \underbrace{\begin{bmatrix}0.05 & 0 & -0.23\\ 0 & 1 & 0\\ -0.23 & 0 & 0.94\end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{B} u \\
&+ \left(\underbrace{\begin{bmatrix}1.97 & 0.32\\ -2.04 & -0.02\\ -0.16 & -0.86\end{bmatrix}}_{K_1} + \underbrace{\begin{bmatrix}-1.82 & -0.45\\ 0.04 & 0.01\\ -0.08 & -0.02\end{bmatrix}}_{K_2} \right) y \\
\hat{x} =& z + \underbrace{\begin{bmatrix}0.94 & 0.23\\ 0 & 0\\ 0.23 & 0.05\end{bmatrix}}_{H} y,
\end{aligned} \tag{13}
$$

Cerințe:

- Proiectați un observator liniar cu decuplarea intrării
- Testați observatorul obținut cu o intrare perturbatoare de tip sinusoidal d

- Afișați eroarea (e) și valoarea estimată
- Testați observatorul obținut cu o perturbație constantă pe porțiuni d

Hint: Funcții matlab folositoare `obsv`, `place`.