

Estimare pentru control – Laborator 2

Model liniar, control prin reacție de la stare, proiectarea unui estimator

Logistică

- Această temă trebuie realizată de un grup de maxim 2 studenți.
- Soluția temei reprezintă codul Matlab și modelul Simulink. Acest cod va fi verificat și rulat de către profesor în timpul laboratoarelor, iar prezența la laborator va fi acordată doar dacă este prezentată o soluție originală care merge. Sunt necesare toate prezențele la laboratoare pentru a intra în examen. De asemenea, maxim 2 laboratoare pot fi recuperate la finalul semestrului, ceea ce înseamnă că 3 sau mai multe absențe pe parcursul semestrului duc la inabilitatea de a intra în examenul final.
- Schimbul de idei între studenți este încurajat. Totuși, distribuirea și împrumutarea unor bucăți de cod este interzisă, iar orice încălcare a acestei reguli va duce la descalificarea soluției.

Premisă:

- Un model neliniar, cu vectorul de stare $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, și vectorul de intrare $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ unde $n \geq 3$, și vectorul de ieșiri $y = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$, unde $n \geq 3$, este numărul variabilelor de stare, $m \geq 1$, este numărul de intrări, iar $p \geq 1$, este numărul de ieșiri. Dinamica sistemului are următoarea formă:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Descrierea temei

În această temă trebuie găsit prima dată un punct de echilibru pentru model. Conform [1], punctele de echilibru pentru un sistem dinamic neliniar de forma $\dot{x} = f(x, u)$ sunt cele pentru care $f(x_0, u_0) = 0$, unde $x_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]^T$ și $u_0 = [u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0}]^T$. De exemplu, fie modelul pendulului inversat:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2 \sin(x_1) - x_2 + u.\end{aligned}$$

Notând $x = [x_1 \ x_2]^T$, și $\dot{x} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ obținem $\dot{x} = f(x, u)$, unde

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2 \sin(x_1) - x_2 + u \end{bmatrix}.$$

Punctele de echilibru sunt date de $f(x_0, u_0) = 0$, care pentru acest exemplu este:

$$\begin{aligned}x_{20} &= 0 \\ 2 \sin(x_{10}) - x_{20} + u_0 &= 0\end{aligned}$$

De aici se obține că $x_{20} = 0$, $u_0 = 0$. Pentru x_{10} sunt multe opțiuni deoarece $\sin(x_{10}) = 0$, poate fi obținut pentru $x_{10} = n\pi$, unde n poate fi orice număr natural. Acest lucru are sens, deoarece dacă stăm

să ne gândim la semnificația fizică a stărilor, pentru un număr n par, înseamnă o poziție orientată în sus iar pentru un număr impar înseamnă o poziție orientată în jos a pendulului.

După ce avem punctul de echilibru, se poate folosi aproximația prin seria Taylor:

$$g(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{x_0, u_0}(x_1 - x_{10}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_0, u_0}(x_n - x_{n0}) \\ + \frac{\partial f}{\partial u_1}|_{x_0, u_0}(u_1 - u_{10}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}|_{x_0, u_0}(u_m - u_{m0}). \quad (1)$$

Cerințe:

- Găsiți punctele de echilibru al modelului.
- Liniarizați modelul în jurul unui punct de echilibru.
- Definiți modelul liniar în reprezentarea matriceală:

$$\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx$$

- Implementați modelul liniar în Matlab-Simulink.
- Calculați matricea de controlabilitate P_c . Dacă modelul este complet controlabil, atunci proiectați o lege de control cu reacție de la stare: $u = -Kx$. Folosiți plasarea polilor pentru a obține matricea de câștig K .
- Adăugați legea de control în modelul Simulink, și simulați cu condiții inițiale diferite de 0. La ce vă așteptați? Merge cum ar trebui?
- În realitate doar o parte din stări sunt disponibile. De exemplu pentru modelul pendulului, se poate măsura doar unghiul, x_1 , și nu se poate măsura viteza unghiulară, x_2 . În acest caz, matricea de ieșire este $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Calculați rangul matricei de observabilitate P_o . Dacă are rang complet, atunci calculați un estimator liniar pentru model folosind din nou metoda plasării polilor. Estimatorul are forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x}$$

unde L este matricea de câștig al estimatorului.

- Adăugați estimatorul la modelul liniar. Dați o condiție inițială diferită pentru observator. Funcționează conform așteptărilor? Eroarea de estimare converge la 0?

Hint: Funcții folosite din Matlab: `obsv`, `ctrb`, `place`.

Bibliografie

- [1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems, Third edition*, P. Education, Ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2000.